Wyrażenia i równania

1 Wykaż, że przepływ ciepła między dwoma zbiornikami ciepła A i B o temperaturach odpowiednio T_A i T_B musi następować od cieplejszego do chłodniejszego.

Rozwiązanie

2 Ciało o masie m porusza się w powietrzu, a opór, jakiego doświadcza, jest wprost proporcjonalny do prędkości ciała. Wykaż, że jeśli ciało spada w kierunku ziemi, zakładając, że kierunek dodatni jest skierowany w dół, to jego prędkość $v(t)$ w czasie t spełnia równanie różniczkowe

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = mg - kv(t),$$

gdzie k jest dodatnią stałą, a g jest przyspieszeniem ziemskim.

Rozwiązanie

3 W transporcie powietrznym paczka namiotów o łącznej masie m zostaje zrzucona z samolotu lecącego na dużej wysokości. Spadając, paczka doświadcza oporu powietrza, który jest wprost proporcjonalny do kwadratu jej prędkości. Wykaż, że równanie opisujące ten stan rzeczy to

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = mg - kv^2(t),$$

gdzie $v(t)$ to prędkość paczki w czasie t, a g to przyspieszenie ziemskie.
Następnie, zakładając, że kierunek w dół jest dodatni, wykaż, że końcowa prędkość paczki dana jest jako

$$\sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

Rozwiązanie

4 Słońce promieniuje i ogrzewa ziemię. Jednocześnie ziemia emituje promieniowanie otrzymane od słońca. Całkowita moc energii P_s (energia na sekundę) wypromieniowanej przez słońce (promieniowanie ciała doskonale czarnego) i całkowita moc energii P_Z pochłanianej przez ziemię dane są jako

$$P_s = 4\pi\sigma {R_s}^2 {T_s}^4, \quad P_Z = \frac{P_s {R_Z}^2}{4d^2},$$

gdzie R_s i R_Z to promienie słońca i ziemi, T_s i T_Z to temperatury powierzchniowe słońca i ziemi, d to odległość między słońcem a ziemią, a σ to stała Stefana-Boltzmana. Zakładając, że ziemia jest w stanie równowagi termicznej, to znaczy, że zaabsorbowana moc jest równa wyemitowanej mocy, wykaż, że temperatura powierzchni słońca dana jest jako

$$T_s = T_Z \sqrt[4]{\frac{4d^2}{{R_s}^2}}.$$

Rozwiązanie

Rozwiązania

1 Gdy określona ilość ciepła ΔQ jest pobierana lub oddawana przez zbiornik ciepła o stałej temperaturze T, zachodzi wówczas zmiana entropii ΔS, gdzie

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}.$$

Zmiana entropii zbiornika A wynosi

$$\Delta S_A = \frac{\Delta A_A}{T_A},$$

a zmiana entropii zbiornika B wynosi

$$\Delta S_B = \frac{\Delta B_A}{T_B}.$$

Całkowita zmiana entropii dla systemu dwóch zbiorników to:

$$\Delta S_{total} = \Delta S_A + \Delta S_B,$$

gdzie $\Delta S_{total} > 0$ według drugiej zasady termodynamiki.

Zatem

$$\Delta S_{total} = \Delta S_A + \Delta S_B = \frac{\Delta Q_A}{T_A} + \frac{\Delta Q_B}{T_B} > 0.$$

Jeżeli określona ilość ciepła ΔQ przechodzi z jednego zbiornika do drugiego, to ciepło utracone z jednego jest uważane za ujemne, a ciepło uzyskane przez drugi jest uważane za dodatnie, więc

$$|\Delta Q_B| = |\Delta Q_A|, \quad \text{ale} \quad \Delta Q_B = -\Delta Q_A.$$

Podstawiając powyższe równanie do wzoru na całkowitą zmianę entropii systemu dwóch zbiorników, widzimy, że:

$$\begin{aligned}\Delta S_{\text{total}} &= \frac{\Delta Q_A}{T_A} + \frac{\Delta Q_B}{T_B} \\ &= \frac{\Delta Q_A}{T_A} - \frac{\Delta Q_A}{T_B} \\ &= \Delta Q_A\left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B}\right) \\ &= \Delta Q_A\left(\frac{T_B - T_A}{T_A T_B}\right) > 0\end{aligned}$$

Dlatego albo $\Delta Q_A > 0$ i $T_B > T_A$, albo $\Delta Q_A < 0$ i $T_B < T_A$.

Oznacza to, że jeśli zbiornik *A* zyskuje ciepło, to jest chłodniejszy niż zbiornik *B* lub jeśli zbiornik *A* traci ciepło, to jest cieplejszy niż zbiornik *B*. W każdym przypadku ciepło przepływa z cieplejszego do chłodniejszego zbiornika.

Pytanie

---

2 Gdy ciało spada, przyspiesza w dół. Działają wówczas na nie siła grawitacji skierowana w dół i siła oporu skierowana w górę. Siła wypadkowa działa w dół, dając przyspieszenie. Zatem:

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = mg - kv(t)$$

przy założeniu, że dodatni kierunek jest skierowany w dół.

Pytanie

---

3 Gdy paczka spada, przyspiesza w dół. Działają wówczas na nią siła grawitacji skierowana w dół i siła oporu skierowana w górę. Siła wypadkowa działa w dół, dając przyspieszenie. Zatem:

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = mg - kv^2(t).$$

Ostatecznie siła oporu będzie wystarczająca, aby pokonać działającą w dół siłę grawitacji, co spowoduje, że ciało będzie mieć przyspieszenie zerowe.

Zatem:

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = mg - kv^2(t) = 0, \text{ a więc } mg = kv^2(t), \text{ czyli } v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

Pytanie

---

4 Zakładając, że ziemia promieniuje według tych samych mechanizmów co słońce (ciało doskonale czarne), możemy zapisać, że:

$$\begin{aligned} P_\mathrm{Z} &= 4\pi\sigma {R_\mathrm{Z}}^2 {T_\mathrm{Z}}^4 && \text{przez analogię z } P_\mathrm{S} = 4\pi\sigma {R_\mathrm{S}}^2 {T_\mathrm{S}}^4 \\ &= \frac{P_\mathrm{S} {R_\mathrm{Z}}^2}{4d^2} && \text{jak podano} \\ &= \frac{4\pi\sigma {R_\mathrm{S}}^2 {T_\mathrm{S}}^4 {R_\mathrm{Z}}^2}{4d^2} && \text{podstawiając za } P_\mathrm{S} \\ &= \frac{\pi\sigma {R_\mathrm{S}}^2 {T_\mathrm{S}}^4 {R_\mathrm{Z}}^2}{d^2} && \text{skracając.} \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{\pi\sigma {R_\mathrm{S}}^2 {T_\mathrm{S}}^4 {R_\mathrm{Z}}^2}{d^2} = 4\pi\sigma {R_\mathrm{Z}}^2 {T_\mathrm{Z}}^4,$$

czyli

$$\frac{{R_\mathrm{S}}^2 {T_\mathrm{S}}^4}{d^2} = 4{T_\mathrm{Z}}^4$$ Redukując wspólne czynniki po obu stronach równania.

Zatem

$${T_\mathrm{S}}^4 = \frac{{T_\mathrm{Z}}^4 4d^2}{{R_\mathrm{S}}^2}, \text{ a więc } T_\mathrm{S} = T_\mathrm{Z}\sqrt[4]{\frac{4d^2}{{R_\mathrm{S}}^2}}.$$

Pytanie
